Heft Nr. 6 | 25.09.2015 | 48. Jahrgang | ISSN 0178-0786

GEW

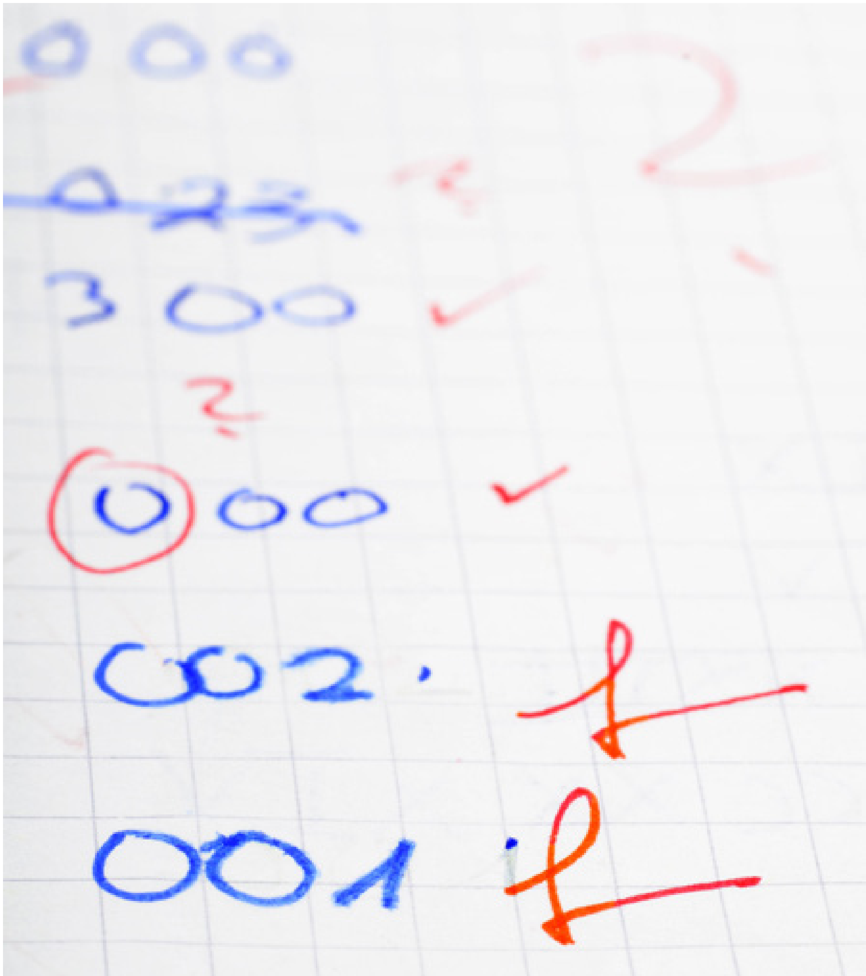
unterrichtspraxis

Beilage zu „bildung und wissenschaft“
der Gewerkschaft Erziehung und Wissenschaft Baden-Württemberg

MATHEMATIKDIDAKTIK

Rechenstörung – Hauptmerkmale und Hilfen

Kinder und Jugendliche mit massiven Problemen in Mathematik fallen in der Schule immer wieder auf. Wann spricht man hierbei von einer Rechenstörung? Wie kann man diese zu einer Leistungsschwäche in Mathematik abgrenzen? Wie können Kindern und Jugendlichen mit dieser Problematik in der Schule geholfen werden? Auf diese Fragen soll dieser Artikel Antworten geben.[(1)]



Quelle: imago

Es reicht nicht aus, Fehler anzustreichen

Begriffsvielfalt

In der vielfältigen Literatur zu Problemen mit Mathematik wird der Begriff Rechenstörung unterschiedlich verwendet. Es existiert eine Vielzahl von Begriffen (Lorenz, Radatz 2007, S. 17) wie etwa Akalkulie, Arithmasthenie, Dyskalkulie, Rechenschwäche, Rechenstörung, Zahlenblindheit etc.
Die Begriffe, die am häufigsten in der Literatur Verwendung finden, sind: Rechenschwäche, Dyskalkulie und Rechenstörung. In diesem Artikel wird vorrangig der Begriff Rechenstörung verwendet, da die WHO (Welt-Gesundheits-Organisation) diesen Begriff auch in ihrer Klassifikation im Rahmen von Entwicklungsstörungen verwendet. Außerdem geht dieser Begriff von einer Störung aus, deren Ursache nicht geklärt wird. Dieses Konzept entlastet daher die betroffenen Schülerinnen und Schüler, während die anderen Begriffe eher die Ursache alleine bei den Betroffenen suchen.

Definition der WHO

Eine Rechenstörung bezeichnet eine Beeinträchtigung von Rechenfertigkeiten, ohne eine allgeneine Intelligenzminderung oder Problemen mit der Beschulung. Dabei wird die Schwierig-

(1) Einzelne Absätze dieses Artikels wurden meinem Buch „3+3=5 Rechenstörung: Merkmale, Diagnose und Hilfen“ (2011) entnommen.

keit vor allem bei den Grundrechenarten gesehen und nicht bei Problemen mit der höheren Mathematik (vgl. Remschmidt 2009, S. 138).
Diese Definition spielt im Schulalltag allerdings eine untergeordnete Rolle, denn letztendlich muss allen Kindern geholfen werden, die Probleme in Mathematik haben, egal ob es sich um eine Rechenstörung handelt oder nicht.

Hauptmerkmale einer Rechenstörung

Da es im Schulalltag meist nicht möglich und auch überhaupt nicht nötig ist, ein langwieriges Testverfahren für die Feststellung einer Rechenstörung durchzuführen, sollten Lehrer/innen die Hauptmerkmale einer Rechenstörung kennen und feststellen können, um den betroffenen Kindern und Jugendlichen zu helfen. Als wesentliche Merkmale werden dabei die drei **Bereiche Nominalismus des Zahlbegriffs, Mechanismus der Rechenverfahren und Konkretismus beim handelnden Operieren** (vgl. Wehrmann 2003) angenommen, die sich allerdings nicht immer überschneidungsfrei differenzieren lassen. Einzelne Anzeichen können durchaus in den verschiedenen Bereichen auftreten.

Nominalismus des Zahlbegriffs

Dieses Merkmal ist der wichtigste Indikator einer Rechenstörung. Es zeigt sich darin, dass zwar Namen von Zahlen und die Zuordnung zu Symbolen (Ziffern) oftmals bekannt sind, jedoch ohne Verständnis benutzt werden. Die Zahlvorstellung ist daher sehr eingeschränkt. Zahlen können nicht in Beziehungen zu anderen Zahlen gedacht werden. Meist können Kinder und Jugendliche, die diese Symptomatik zeigen, gerade noch Vorgänger und Nachfolger einer Zahl benennen. Sie haben jedoch nur sehr wenige weitere Vorstellungen vom Zahlbegriff, insbesondere des Teile-Ganzes-Schemas. Sie wissen also nicht, dass sich die Zahl neun aus vier und fünf, drei und sechs usw. zusammensetzt. Ebenso fehlt auch die wichtige Vorstellung der Zahlen in Relation zueinander. Kinder mit dieser Problematik können eventuell noch unterscheiden, ob 34 größer oder kleiner als 52 ist, sie wissen aber nicht, welche Zahl in der Mitte zwischen 50 und 100 liegt. Gut lässt sich das an folgendem Beispiel zeigen:
Geübte Rechner/innen haben mit der Aufgabe 101-99 keine Probleme. Sie sehen die Zahlen in Relation zueinander und können deshalb leicht entscheiden, dass die Differenz der Zahlen 2 ergibt, ohne bewusst rechnen zu müssen. Kinder, denen diese Vorstellung fehlt, müssen die Aufgabe auf andere Weise lösen. Sie entscheiden sich deshalb für ein auswendig gelerntes, meist nicht verstandenes Verfahren. Sie rechnen also im günstigen Fall 101-90. Diese Teilaufgabe, die die ursprüngliche Aufgabe eigentlich erleichtern soll, macht sie allerdings wesentlich komplizierter. Falls die Kinder diese Teilaufgabe korrekt lösen, folgt die zweite Aufgabe 11-9. Diese kann man wieder einfacher lösen. Insgesamt ist aber aus einer relativ einfachen, eine komplexe Aufgabe entstanden. Anhand dieses Beispiels soll gezeigt werden, wie wichtig es ist, mentale Bilder von Zahlenrelationen aufzubauen. Nur dann können Rechenaufgaben wirklich mit Verständnis gelöst werden.
Auch älteren Schüler/innen bereitet die Vorstellung der Zahlen in Relationen zueinander noch Schwierigkeiten. Ein 17-jähriger Schüler soll Aufgaben danach einteilen, ob diese schwer oder leicht für ihn zu lösen sind. Er legt die Aufgabe 102-99 zu den schwierigen Aufgaben. Im Interview wird er gefragt, warum er sich so entschieden hat. Er meint, er könne die Aufgabe nach einigem Nachdenken zwar lösen, aber die 99 mache ihm Angst, die sehe so schwer aus. Hier behindert eine vollkommen unerwartete Eigenschaft der Zahlen das Rechnen. Wären hingegen die Zahlrelationen ausgeprägt, würde das so vermutlich nicht vorkommen.
In Verbindung mit der Problematik von Zahlenrelationen steht auch das fehlende Verständnis des Stellenwertsystems. Kinder mit einer Rechenstörung unterscheiden beispielsweise oftmals nicht zwischen Zehnern und Einern. Dies kann sich etwa darin zeigen, dass 15+3=9 gerechnet wird. Die Kinder lösen in diesem Fall die Aufgabe folgendermaßen: 1+5+3=9, zählen also die einzelnen Stellen zusammen und ermitteln damit zwar die Quersumme, kommen aber nicht zum korrekten Ergebnis. Ziffern haben für die Kinder in diesem Fall immer denselben Wert, egal an welcher Stelle sie stehen.
Alle diese bisher beschriebenen Vorstellungen von Zahlen reichen nicht aus, um angemessen rechnen zu können. Als einzige Möglichkeit, eine Rechenaufgabe lösen zu können, bleibt diesen Kindern keine andere Möglichkeit, als das Ergebnis zählend zu ermitteln. Zum Zählen nutzen die Kinder und Jugendlichen Finger oder sonstige Materialien wie Stifte. Oftmals wird auch einfach in der Vorstellung weitergezählt. Das zählende Rechnen kann ein Anzeichen für das Merkmal Nominalismus des Zahlbegriffs sein.

Zählendes Rechnen

Um eine Vorstellung dieser Problematik zu erhalten, hier einige Beispiele:
Ein 17-jähriger Jugendlicher berichtet, wie er die Aufgabe 76+3 rechnet: „Ich lehne meinen Kopf auf dem Arm auf, da habe ich 5 Finger, dann nehme ich mit der anderen Hand noch einen dazu, damit ich sechs bekommen und dann noch drei Finger. Das sind neun, also 79".
Eine Schülerin der Grundschule bekommt die Aufgabe, ab der Zahl 36 in Zehnerschritten weiter zu zählen. Es dauerte sehr lang, bis sie die jeweils korrekte Zahl nennen kann. Auf die Frage, wie sie vorgegangen sei, zeigt sie ihre Finger und beginnt damit zu zählen: 37, 38,… 46. Bei der Ermittlung der nächsten Zahl läuft wieder das gleiche Prozedere ab. Ebenso als sie rückwärts in Zehnerschritten zählt.
Ein anderer Schüler soll die Aufgabe 13+3 rechnen. Er zählt bei der Lösung der Aufgabe laut: 13, 14, 15. Die letzte Zahl ist gleichbedeutend mit seinem, in diesem Fall, nicht korrektem Ergebnis.
Alle diese Kinder und Jugendlichen konnten die ihnen gestellten Aufgaben nur mit Hilfe des Zählens lösen. Dabei waren nicht alle Lösungsversuche korrekt. Beim zählenden Rechnen wird das Ergebnis einer mathematischen Aufgabe ermittelt, indem man die Zahlwortreihe aufsagt. Dies kann vorwärts, rückwärts oder auch in Zehnerschritten geschehen.
Das grundsätzliche Problem im Unterricht ist aber nicht das zählende Rech-

nen. Denn diese Herangehensweise an das Rechnen ist vollkommen normal. Auch viele von uns bedienen sich ab und an des zählenden Rechnens, beispielsweise bei der Ermittlung der Uhrzeit oder von Monaten bei der Aufgabe: „Wie viele Monate sind es von Anfang April bis Ende November?“ Problematisch wird dieses Vorgehen, wenn es sich verfestigt. Das bedeutet, dass die Kinder und Jugendlichen mit keinem anderen Verfahren das Ergebnis der Rechenaufgabe ermitteln können. Während dies Mitte Klasse 1 noch nicht kritisch gesehen wird, ist es ab Klasse 2 und in allen höheren Klassen besorgniserregend. Das Problem ist, dass Kinder, die nur zählend rechnen, oftmals gar nicht auffallen, da Zählen im kleinen Zahlenraum oftmals schnellere Ergebnisse liefert, als das Rechnen mit unterschiedlichen Strategien.

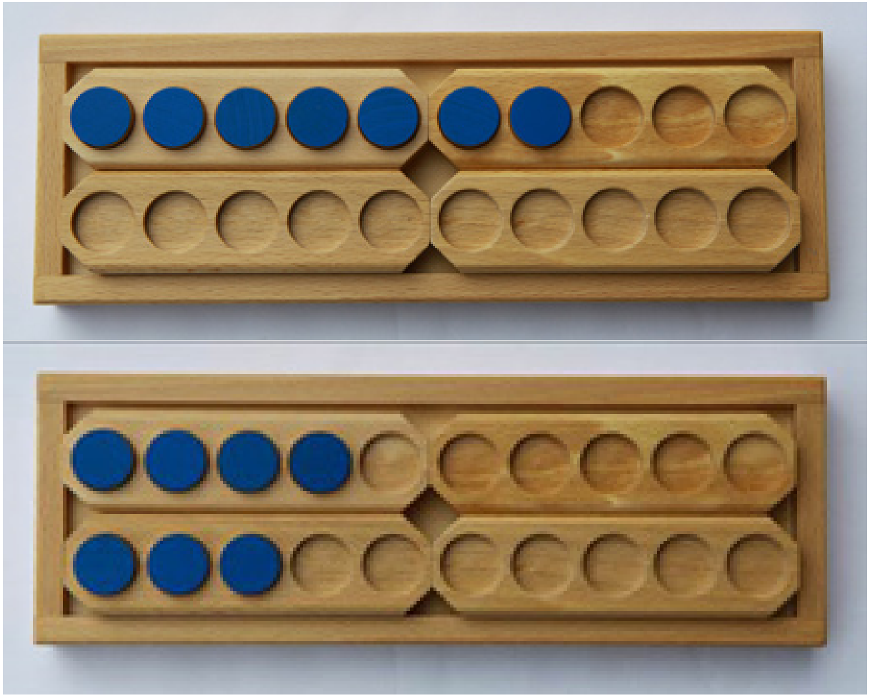
Mit zählendem Rechnen kommt man meistens zu einer Lösung der gestellten Aufgabe. Trotzdem bereitet das verfestigte zählende Rechnen aus folgenden Gründen große Probleme:

- Das Kurzzeitgedächtnis wird überlastet.
- Komplexe Aufgaben sind fehleranfällig.
- Zählfehler können gehäuft auftreten (+-1 Fehler).
- Zerlegungstechniken und Analogien werden nicht erkannt.
- Zählkinder haben oft Schwierigkeiten, Aufgaben auswendig zu lernen.
- Bei der Multiplikation steigern sich die Probleme mit dem Zählen.
- Bei Sachaufgaben wird zu viel Energie und Zeit in das Rechnen gesteckt.
- Zählen ist mit größeren Zahlen sehr langsam.
- Die Notwendigkeit, andere Strategien zu erlernen, wird nicht gesehen.

Verschiedene Einflussgrößen führen zu einer Verschärfung des Problems mit dem verfestigten zählenden Rechnen. Ein gravierender Faktor ist beispielsweise das zu frühe Rechnen mit Ziffern und Symbolen, wenn für diese noch gar kein Verständnis aufgebaut wurde. Immer wieder bereitet auch falsche elterliche oder von anderer Seite geleistete „Hilfe“ Schwierigkeiten, etwa beim verfrühten Verwenden der schriftlichen Algorithmen. Das größte Problem ist aber meist die Arbeit mit Materialien, mit denen nur zählend gerechnet werden kann, wie etwa Steckwürfeln, Perlen oder ähnlichem mathematisch unstrukturiertem Material.

Hilfen zur Überwindung

Um den Nominalismus des Zahlbegriffs mit dem zählenden Rechnen überwinden zu können, ist es wichtig, vielfältige Vorstellung von Zahlen aufzubauen. Dies beginnt mit einer ersten mentalen Darstellung von Zahlenbildern. Mit Hilfe eines Zwanzigerfeldes (Rechenschiffchen, Zahlenfeldkarten…) werden Mengen in Block- und Reihendarstellung präsentiert (vgl. Kaufmann/Wessolowski 2006, S. 34ff.).



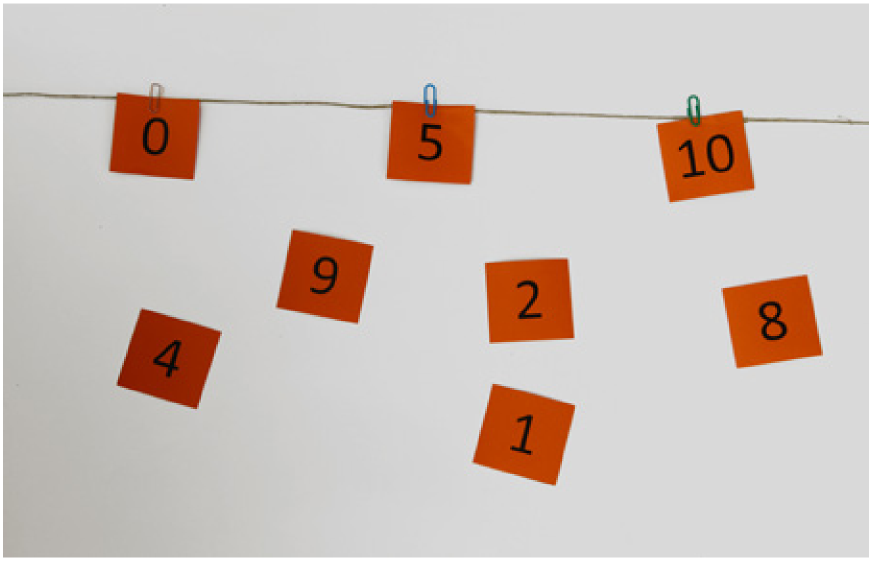
Quelle: Streiflicht Fotografie

Die Zahl Sieben in Rechenschiffchen in der Reihen- und Blockdarstellung

Die Kinder versuchen selbst, geeignete Anordnungen für Zahlen zu finden. Dabei hilft die Fragestellung: In welcher Anordnung sehe ich die Zahlen auf einen Blick? Danach folgen Übungen zum Blitzblick, indem das Zwanzigerfeld nur Sekundenbruchteile gezeigt wird. Die Kinder benennen die Zahl. Können sie das nicht, sollen sie das Gesehene beschreiben, gelingt das auch nicht, muss das Zwanzigerfeld etwas länger präsentiert werden. Durch Übungen dieser Art gelangen die Bilder für die Zahlen in den Kopf der Kinder. Wenn sie jetzt die Zahl 7 hören, können sie sich das passende Punktebild der Zahl vorstellen und wissen dann auch einige Eigenschaften zur Zahl. Beim Bild der Reihendarstellung erfahren sie, dass es zwei mehr als fünf sind, dass noch drei bis zur zehn fehlen. In der Blockdarstellung erfahren sie, dass es eine ungerade Zahl ist, dass sie sich aus drei und vier zusammensetzt. Viele Kinder haben diese Übungen bereits in der Grundschule kennen gelernt und sind trotzdem am Mathematikunterricht gescheitert. Vermutlich war diese Phase dann für die meisten von ihnen zu kurz und es konnten keine stabilen Bilder der Zahlen aufgebaut werden.

Wichtig ist auch, dass keine unstrukturierten Materialen, wie Steckwürfel oder andere einzeln abzählbare Elemente, verwendet werden, da hierbei keine mentalen Bilder aufgebaut werden. Außerdem regen diese Materialien zum Zählen an und zeigen keinen Weg auf, davon wegzukommen. Diese Materialien erzeugen Abhängigkeiten, da ohne sie nicht gerechnet werden kann.

Dieses bislang erworbene Wissen über Zahlen reicht aber nicht zum späteren Rechnen aus. Wir, als versierte Rechner/innen, stellen uns auch nicht Punktebilder vor, wenn wir Rechnungen lösen. Trotzdem sind diese ersten Erfahrungen über Zahleigenschaften wichtig, um Vorstellungen aufzubau-



Quelle: Streiflicht Fotografie

Zahlenleine mit den Zahlen 0, 5 und 10

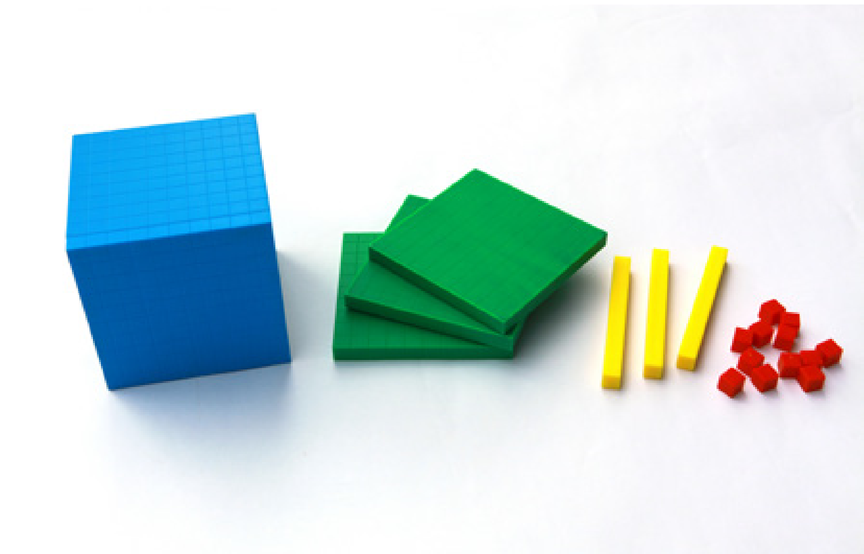
en. Um diese Vorstellungen zu vertiefen, ist es wichtig, diese auf den relationalen Zahlaspekt zu übertragen. Der relationale Zahlaspekt fragt nach Beziehungen der Zahlen untereinander. Die oben genannte Aufgabe 101-99 ist ein passendes Beispiel dafür. Bei der Lösung fragt man sich, wie die Zahlen zueinander in Beziehung stehen, um ganz einfach zur Lösung 2 zu gelangen. Die Zahlbeziehungen fragen auch nach Zahlen, die in der Mitte zwischen zwei bekannten Zahlen stehen. Beispielsweise soll die Mitte zwischen 10 und 20 gefunden werden. Hierfür ist es nicht nötig den Algorithmus des arithmetischen Mittels zu benutzen, man kann einfach durch das Kennen der Eigenschaften der Zahlen die Mitte finden. Dieses Zahlgefühl kann relativ einfach mit Hilfe eines Zahlenstrichs geübt werden. In meinen Klassen habe ich immer eine Leine aufgehängt und diese mit Zahlenkarten bestückt. Dazu mussten zuerst alle Zahlen zwischen null und zehn aufgehängt werden. Später fehlten einige Zahlen, diese mussten eingefügt werden, bis schließlich nur noch 0 und 10 hängen und der passende Platz der 5 gefunden werden muss. Dies gestaltet sich noch schwieriger, wenn der Platz der 6 gefunden werden muss oder der Zahlenraum erweitert wird (vgl. Abb. 2). Dieses Material kann auf beliebige Zahlenräume erweitert und so auch in noch in höheren Klassen zum Aufbau von Zahlvorstellungen verwendet werden.

Zur weiteren Förderung des Zahlbegriffs eignet sich auch das Zehnersystemmaterial (vgl. Abb. 3), das wichtige Eigenschaften unseres Zahlensystems widerspiegelt, oder Zahlenkarten, die beispielsweise bei der Überwindung des Problems der Verwechslung der Zehner und Einerstelle Hilfe bieten können.

Mechanismus der Rechenverfahren

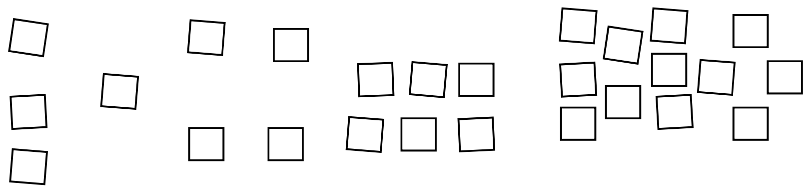
Dieses Hauptmerkmal einer Rechenstörung beinhaltet, dass unterschiedliche Rechenverfahren rein mechanisch, unreflektiert und ohne Verständnis des zugrundeliegenden Hintergrundes bearbeitet werden. Diese Vorgehensweisen stehen in einem engen Zusammenhang mit dem Operationsverständnis, einer der Grundlagen des verstehenden Rechnens. Operationsverständnis meint dabei unter anderem, das Begreifen der Hintergründe einer Operation. Kinder sollten beispielsweise bezüglich der Subtraktion wissen, was dieser Begriff bedeutet. Im Falle der Subtraktion handelt es sich eben nicht nur um ein Rückwärtszählen oder dem Zählen in eine spezielle Richtung. Es kann auch bedeuten, dass beispielsweise von einer Menge etwas weggenommen wird, oder zwei unterschiedliche Mengen miteinander verglichen werden. Durch fehlendes oder einseitiges Operationsverständnis ist Rechnen meist nur das Verknüpfen von Zeichen und Symbolen nach bestimmten, meist unverstandenen Regeln.

Kinder mit mangelndem Operationsverständnis können Rechenaufgaben eventuell zählend lösen. Sie schaffen es jedoch nicht, die Rechenaufgaben mit Inhalten zu verknüpfen, wie das Beispiel einer Zweitklässlerin zeigt, die zu der Aufgabe 4+2 eine Rechengeschichte erzählen sollte: Eine „4“ ging auf den Spielplatz, dann kam ein „+“ und eine „2“ dazu. Die 4 fragte, ob sie miteinander spielen wollten. Am Ende kam noch eine „6“ dazu. Das Mädchen personalisiert die Zahlen und Rechenzeichen, kann aber keine Mengen mit den Zahlen, beziehungsweise Operationen mit den Rechenzeichen verbinden. Für



Quelle: Streiflicht Fotografie

Zehnersystemmaterial



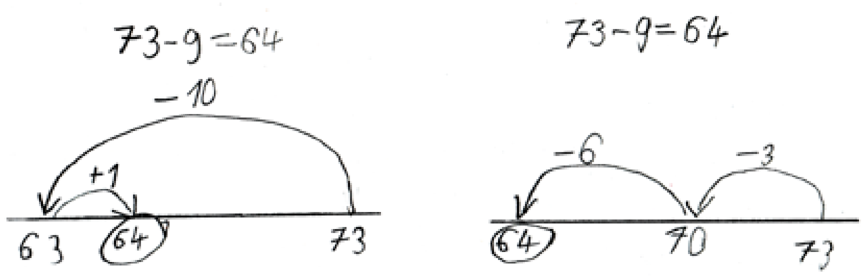
„Enaktive" Lösung der Aufgabe 3·4=12

sie fehlt eine Bedeutung des Operationszeichens „+", beziehungsweise ist sie propädeutisch vorhanden, indem in ihrer Geschichte mehrere Zahlen zusammen kommen, jedoch nicht die dazugehörigen Mengen. Das Ergebnis der Operation kann sie zwar ermitteln, aber nicht richtig deuten.
Ein Schüler der fünften Klasse sollte die Aufgabe 3·4 mit Hilfe von Würfeln darstellen. Er konnte zwar das korrekte Ergebnis ermitteln, seine Darstellung geht aber nicht über den symbolischen Charakter hinaus. Bei ihm stehen die Zahlen als Symbole in Würfelform. Die Operation wird nicht dargestellt. Eine Darstellung, die ein gutes Operationsverständnis zeigt, sind beispielsweise drei Reihen mit jeweils vier Würfeln. Daraus wird der Kontext der Aufgabe sichtbar. Es sind vier Gegenstände jeweils dreimal vorhanden, wie es die Aufgabe ausdrückt. Die Lösung des Schülers deutet darauf hin, dass er Aufgaben des kleinen Einmaleins ohne Verständnis für den Zusammenhang auswendig gelernt hat. Darauf deutet auch hin, dass er zu der genannten Aufgabe keine Rechengeschichte erzählen konnte, obwohl ihm der Begriff Rechengeschichte bekannt war und er zumindest zu additiven Situationen vielfältige Geschichten erzählen konnte.
Kinder, die Probleme mit dem Mechanismus der Rechenverfahren haben, raten meist bei Sachaufgaben, welche Operation eingesetzt werden muss. Viele Schulbücher oder Arbeitsblätter gehen auf dieses Problem jedoch überhaupt nicht ein. Sie verschärfen es dadurch, dass in einem bestimmten Kapitel oder auf einer Seite immer nur genau eine Operation zum Einsatz kommt. Andere Operationen werden künstlich vom Kind weggehalten. Sachaufgaben werden aufgrund dieser Isolierung der Probleme nicht durch Verständnis, sondern dadurch gelöst, dass in einer Aufgabe verschiedene Zahlen gesucht werden. Diese werden genauso wie in der ersten, meist noch von der Lehrperson vorgerechneten Aufgabe, miteinander verknüpft. Durch die einseitige Präsentation der Aufgaben werden zwar viele korrekt gelöst, ohne dass jedoch ein Verständnis für den Lösungsprozess vorhanden ist, und ohne dass dies durch die Lehrperson registriert werden kann. Es ist aber ungemein wichtig, dass das Operationsverständnis bereits in der ersten Klasse durch Vermischung der Operationen gefördert wird.
Nicht nur bei eingekleideten Aufgaben und dem Sachrechnen zeigt sich diese Symptomatik. Auch bei symbolischen Rechnungen werden von Kindern oftmals Rechenzeichen verwechselt. Das zeigt sich beispielsweise wenn zwei Zahlen subtraktiv verknüpft werden sollen, und diese dann addiert werden. Ein solches Vorgehen kann allerdings mehrere Gründe haben. Zählende Rechner/innen beispielsweise bevorzugen oftmals die Addition gegenüber der Subtraktion. Ob sie deshalb bewusst aus einem Subtraktionszeichen ein Additionszeichen machen, oder ob dies unbewusst geschieht, muss im Einzelfall entschieden werden. Deutlicher wird dies bei Kindern mit einer Wahrnehmungsstörung, die sich in der Lateralität zeigt. Das bedeutet, diese Kinder haben Schwierigkeiten mit der Rechts-Links Orientierung. Dies bezieht sich allerdings nicht allein auf die Verwechslung der beiden Begriffe, sondern auch auf die Verwechslung von Richtungen. Addition bedeutet für diese Kinder oftmals, sich auf dem Zahlenstrahl in eine Richtung zu bewegen. Sie können sich diese Richtung jedoch nicht merken und suchen die Lösung einer Additionsaufgabe auf der linken Seite.
Ähnliche Probleme kann es auch bei anderen konträren Begriffspaaren, wie beispielsweise vorher-nachher geben. Kindern mit dieser Problematik fällt es schwer, zeitliche Abfolgen in der richtigen Reihenfolge aufzuzählen. Dies zeigt sich beispielsweise darin, dass es für diese Kinder schwer ist, eine Bilderfolge in eine korrekte Reihe zu bringen. Beispielsweise die Bilderfolge einer brennenden Kerze, die immer kleiner wird und schließlich erlischt.
Zum Mechanismus der Rechenverfahren gibt es abschließend noch zwei Bemerkungen: Dieses Symptom darf nicht mit der Automatisierung von Aufgaben verwechselt werden. Die Automatisierung stellt einen wichtigen Teilschritt zur Entlastung des Gedächtnisses bei der Lösung von sehr komplexen Aufgaben dar. Die Automatisierung des kleinen „Einspluseins" und „Einmalseins" ist unerlässlich, sollte jedoch nicht ohne Verständnis für die entsprechenden Operationen erfolgen.
Das Operationsverständnis ist mit dem Zahlverständnis inhaltlich untrennbar miteinander verbunden. Die Entwicklung des Operationsverständnisses fördert das Zahlverständnis und natürlich auch umgekehrt. Auch an dieser Stelle zeigt sich wieder eine Verknüpfung der einzelnen Symptome miteinander.

Hilfen zur Überwindung

Auch hier eignen sich wieder die vorhin beschriebenen Materialien. Eine Einführung kann mit Hilfe des Zwanzigerfeldes geschehen. Beispielhaft wird die Addition beschrieben. Ein Summand wird in das Zwanzigerfeld gelegt, der andere in einer anderen Farbe dazu. Das Ergebnis kann ohne Zählen ermittelt werden. Wichtig ist jedoch, dass die Summanden ohne Zählen in das Material gelegt werden, also dass bereits eine Vorstellung des Aussehens der Anzahl im Zwanzigerfeld vorhanden ist. Nach einigen Aufgaben kann man zum Teil auf die enaktive Handlung verzichten und beispielsweise nur den ersten Summanden legen, der zweite wird nur gedacht. Dies können Kinder aber nur dann leisten, wenn genügend Vorübungen zum Blitzblick, wie oben beschrieben, erfolgt sind. Hierbei zeigt sich der große Vorteil des Materials gegenüber nichtstrukturiertem Materialien, denn nur wenn eine Struktur vorhanden ist, können die Kinder einen Teil der

Aufgabe in den Kopf auslagern. Wenn die Kinder gut in der Lage sind, einen Teil der Aufgabe mental vorzustellen, dann kann auch die ganze Aufgabe in der Vorstellung gelöst werden. Wichtig ist hierbei auch immer die sprachliche Unterstützung der Handlung. Dies kann dadurch realisiert werden, dass die Zahlen im Zwanzigerfeld sprachlich beschrieben werden, also die 7 ist ein volles Schiffchen und zwei einzelne Plättchen. Die Aufgabe 6 + 7 kann dadurch gelöst werden, dass der Fünferübergang besonders thematisiert wird. Die 6 wird als ein volles Schiffchen und ein einzelnes Plättchen beschrieben. Zusammen sind das zwei volle Schiffchen und drei Einzelne. Die Vorstellung der Aufgabe wird durch die sprachliche Beschreibung wesentlich erleichtert.
Für den größeren Zahlenraum eignet sich das Zehnersystemmaterial zur Überwindung der vorhandenen die enaktive mit der symbolischen Ebene verknüpft. Durch das Papier wird das Zählen zum größten Teil verhindert und es werden Hilfen zum Aufbau einer gesicherten Zahlvorstellung gegeben. Diese Vorgehensweise gerät mit komplizierten Zahlen allerdings an ihre Grenzen, jedoch kann mit einfachen Zehner-Einer Zahlen hier zumindest der Zahlenraum bis 100 durchdrungen werden.
Wichtig für das Operationsverständnis ist auch wieder der leere Rechenstrich. Er eignet sich besonders gut, um Rechenstrategien darzustellen. Die Aufgabe 73-9 lässt sich auf viele unterschiedliche Arten rechnen. Diese unterschiedlichen Strategien lassen sich hervorragend mit dem leeren Rechenstrich visualisieren. Dies kann im Unterricht zur Diskussion der unterschiedlichen Herangehensweisen genutzt werden.



Unterschiedliche Strategien der Aufgabe 73-9 werden am Rechenstrich visuali-siert.

Schwierigkeiten. Da sich dieses Material aber auch sehr zum Zählen eignet, muss aufgepasst werden, dass die Verwendung des Materials nicht kontraproduktiv zum Zählen animiert. Dies kann durch die Verwendung eines Papiers zum Abdecken des Materials geschehen. Unter das Papier werden beispielsweise zwei Zehnerstangen geschoben. Das Kind wird gefragt, wie viele Würfel unter dem Papier liegen. Jetzt wird der zweite Summand ebenfalls unter das Papier geschoben, in unserem Fall drei Zehnerstangen. Das Kind wird wieder gefragt, wie viele Würfel unter dem Papier liegen. Nach der Antwort wird noch nach der Rechnung gefragt. Auf diese Weise geschieht ein intermodaler Transfer und es wird

Durch diese Visualisierung entstehen Bilder der Strategien im Kopf, die auch geübte Rechner/innen verwenden, da in der Vorstellung der meisten Menschen Zahlen in einem linearen Format repräsentiert sind. Der leere Rechenstrich muss aber vor der Verwendung als Visualisierung von Rechnungen bereits als Zahlenleine bekannt sein, wie dies weiter oben bereits beschrieben wurde.
Der leere Rechenstrich kann in jedem Zahlenraum verwendet werden und eignet sich so auch hervorragend, um Rechnungen in der Sekundarstufe I zu visualisieren. Kindern gelingt es mit diesem Visualisierungsmittel leicht, ihre Rechenstrategien andern Kindern zu erläutern. Das ist vor allem bei Rechenkonferenzen hilfreich. Der Bildungsplan fordert dieses Sprechen über Mathematik in den allgemeinen mathematischen Kompetenzen wie Kommunizieren oder Darstellen von Mathematik.
Der leere Rechenstrich eignet sich aber auch, um verschiedene Größenbereiche wie beispielsweise die Zeit aufzuzeigen. Zeitpunkte werden als kleine Striche wie Zahlen markiert, Zeiträume als Pfeile. Dadurch wird dieses Visualisierungsmittel universell in der Schule einsetzbar und eignet sich nicht wie andere Darstellungsformen nur für ein einziges Format.

Konkretismus beim handelnden Operieren

Damit ist gemeint, dass sich Kinder nicht von Veranschaulichungsmitteln (bspw. Finger, Buntstifte…) lösen können. Dieser handelnde Umgang wird für das eigentliche Rechnen gehalten. Ohne diese Hilfsmittel gelingt es manchen Kindern nicht, das Ergebnis einer Rechenaufgabe zu ermitteln. Diese Rechenhilfsmittel können sowohl in konkreter oder eingeschränkt in der Vorstellung vom Kind als Hilfe genutzt werden. Bei dieser Schwierigkeit tritt oftmals noch zusätzlich auf, dass diese Hilfsmittel in unökonomischer Form verwendet werden, wie dies im folgenden Beispiel deutlich wird: Ein Mädchen konnte beispielsweise Additions- und Subtraktionsaufgaben nur mithilfe der Hundertertafel korrekt ermitteln. Dabei ging sie jedoch bei der Verwendung dieses Hilfsmittels so vor, dass sie alle zu addierenden oder subtrahierenden Zahlen einzeln abzählte. Bei der Aufgabe 5 + 27 legte sie beispielsweise ihren Finger auf die 5 und zählte dann 27 Kästchen in der richtigen Reihenfolge weiter. Sie konnte so zwar das Ergebnis herausfinden, die Struktur dieses Hilfsmittels war ihr jedoch bis zu diesem Zeitpunkt verborgen geblieben. Ohne die Hundertertafel war es ihr nicht möglich, das Resultat zu einer beliebigen Aufgabe zu ermitteln. Auffallend dabei ist die kontraproduktive Verwendung dieses Hilfsmittels. Das Mädchen konnte nur die einzelnen Zahlen abzählen und nicht in Zehnerschritten voranschreiten.

Diese Problematik kann man bei Kindern oftmals durch Fragen aufdecken. Beispielsweise fällt die Beantwortung der Frage 15-7 den Kindern schwer. Fragt man sie aber: „Was ergibt 15 Euro – 7 Euro“ dann erhält man in einigen Fällen eine zügige und korrekte Antwort. Ebenso kann man es bei sehr einfachen Fragestellungen beobachten. Die Aufgabe 2+3 kann nicht gelöst werden. Auf die Frage, wie viel 2 Würfel plus 3 Würfel sind, kann das Kind aber eine korrekte Antwort geben. Ohne dass die Hilfsmittel tatsächlich angeboten werden, sind die Kinder in der Lage, das korrekte Ergebnis zu ermitteln. Entscheidend dabei ist aber, dass sie nicht allein auf diese Vorstellungen zurückgreifen können. Können sie auf andere Vorstellungen zurückgreifen, kann man nicht mehr von diesem Symptom sprechen. Man muss dieses Symptom dahingehend abgrenzen, dass alle Rechner/innen auf verschiedene gedankliche Modelle von Zahlen zurückgreifen. Die Zahlen werden hierbei in Relationen zueinander gesehen. Wenn wir die Zahl 4987 hören, dann sehen wir nicht viele kleine Holzwürfel vor uns, auch nicht 4 Tausender-Würfel, 9 Hunderter-Platten, 8 Zehner-Stangen und 7 Einer-Würfel, sondern wir stellen uns die Zahl in ihren Relationen vor. Beispielsweise, dass sie nah bei 5000 liegt oder ungefähr in der Mitte zwischen 0 und 10 000. Das bedeutet, dass wir auch auf mentale Hilfsmittel, wie beispielsweise den Zahlenstrahl zurückgreifen. Damit ist aber nicht das Problem Konkretismus gemeint. Kinder mit diesem Merkmal sind nicht in der Lage, sich Vorstellungen dieser Art allein nutzbar zu machen. Falls die Operationen doch in der Vorstellung durchgeführt werden können, dann existiert immer auch noch die unökonomische oder falsche Verwendung der Hilfsmittel. Stellen sich die Kinder beispielsweise Holzwürfel ohne Strukturierungshilfe als Rechenhilfe vor, so können Rechnungen im Kopf bis ca. 5 ausgeführt werden, da diese Menge simultan wahrnehmbar und somit auch gedacht vorstellbar ist. Kinder, die gedanklich an diesem Hilfsmittel festhalten, sind damit zwar in der Lage, die Aufgabe 3+2 zu rechnen. Die Rechnung 7 + 8 gelingt nicht im Kopf, da solche Mengen nicht mehr vorstellbar sind. In diesem Fall muss man den Kindern helfen, andere gedankliche Modelle aufzubauen, um Rechnungen dieser Art selbständig lösen zu können. Wie im Beispiel 3+2 gesehen, sind Kinder manchmal in der Lage, trotz dieses Symptoms einzelne Aufgaben im Kopf zu lösen. Deshalb tritt dieses Merkmal oftmals gar nicht offen in Erscheinung. Um herauszufinden, ob dieses Symptom tatsächlich vorliegt, ist es notwendig, immer wieder die Rechenwege der Kinder zu erfragen.

Hilfen zur Überwindung

Als Hilfen bei der Überwindung können die bei den anderen Hauptmerkmalen vorgestellten Arbeitsmittel ebenso zum Einsatz kommen. Über ein Hilfsmittel, das oft eingesetzt wird, muss an dieser Stelle jedoch noch diskutiert werden: die Finger.

Finger sind ein Arbeitsmittel, das den Schüler/innen ständig zur Verfügung steht. Darin liegt auch die große Gefahr dieses Rechenhilfsmittels, denn die Kinder möchten sich oftmals davon nicht lösen. Finger sind gleichzeitig aber auch ein natürliches Hilfsmittel, auf das Kinder zurückgreifen, ohne dass es ihnen explizit erklärt wird. Die meisten Kinder nutzen deshalb auch nicht die Struktur, die dieses Arbeitsmittel mit sich bringt, sondern setzen es lediglich als Zählhilfe ein.

Finger haben den Vorteil, dass sie die Struktur unseres Zehner-Zahlensystems widerspiegeln. Vermutlich zählen wir deshalb im Zehnersystem, da wir zehn Finger haben. Dadurch, dass an jeder Hand fünf Finger sind, lassen sich alle Zahlen quasi-simultan erfassen. Die 7 kann folgendermaßen gezeigt werden: Alle Finger der einen Hand und zwei an der anderen. Bis 10 kann man deshalb mit den Fingern gut rechnen. Dabei bekommt das Rechnen eine ähnlich Struktur wie beim Rechnen mit dem Zwanzigerfeld. Der gravierende Nachteil ist aber, dass beim Rechnen mit den Fingern kein echter Zehnerübergang möglich ist. Das Rechnen bleibt auf den Zahlenraum bis zehn beschränkt. Verdopplungsstrategien, wie sie mit den Rechenschiffchen in der Blockdarstellung gut gezeigt werden können, sind mit den Fingern nicht so leicht erfassbar.

Bei der Zahlzerlegung können die Finger aber eine Hilfe darstellen. Man kann die gewünschte Anzahl von Fingern bereitstellen, im unten stehenden Bild sind es zehn, und dann einen Stift zwischen die Finger legen. Dabei kann man quasi-simultan erfassen, wie viele Finger sich links beziehungsweise rechts vom Stift befinden. Dadurch lässt sich leicht jede beliebige Zahlzerlegung bis 10 zeigen. Dabei spricht man von einer statischen Verwendung der Finger, da sie nicht zählend, sondern nur zum simultanen zeigen von Zahlen verwendet werden.

Quelle: Streiflicht Fotografie

Zehn Finger mit Stift zur Zahlzerlegung 7+3

Für manche Übungen, wie die oben gezeigte Zahlzerlegung, eignen sich die Finger. Für das Rechnen sollten sie nicht verwendet werden, da sonst zwei verschiedene Arbeitsmittel im Zahlenraum bis 20 benötigt werden. Jedes Arbeitsmittel muss dabei wieder neu erlernt werden. Bei diesem Arbeitsmittel ist außerdem die Gefahr groß, dass Kinder, wenn sie die Technik einmal perfektioniert haben, nicht mehr auf dieses Rechenhilfsmittel verzichten wollen und es auch bei größeren Zahlen, dann zählend, einsetzen. Eine Abgewöhnung ist schwierig. Die Lehrkraft kann auch nicht verhindern, dass dies geschieht, denn Kinder können das Rechnen mit den Fingern geschickt vertuschen. Ein bloßes Verbot bewirkt hier auch nichts, denn Kinder sind nach dem Verbot nicht mehr in der Lage, Rechnungen durchzuführen. Den Kindern muss im Falle eines Verbots eines Arbeitsmittels gleichzeitig ein anderes Hilfsmittel angeboten werden, das zum schnelleren Rechnen in der Vorstellung geeignet ist. Diese Gefahr besteht vor allem dann, wenn die Finger dynamisch, also in Verbindung mit dem Zählen, eingesetzt werden.

Zusammenfassung

Alle drei Hauptmerkmale ergänzen und überschneiden sich, da sie die Probleme der Kinder aus unterschiedlichen Blickwinkeln betrachten. Der Nominalismus des Zahlbegriffs greift in erster Linie das Zahlverständnis und das zählende Rechnen auf, der Mechanismus der Rechenverfahren die Rechenwege und der Konkretismus beim handelnden Operieren den unreflektierten Umgang mit Rechenhilfsmitteln. So überschneiden sich alle diese Merkmale, man kann sie aber auch voneinander abgrenzen. Wenn diese drei Hauptmerkmale bei einem Kind auftreten, kann davon ausgegangen werden, dass es sich bei den Problemen des Kindes um eine Rechenstörung handelt, ohne dass diese klinisch diagnostiziert wurde. Die Probleme des Kindes sind durch diese Vielfalt so massiv, dass es sich nicht von allein helfen kann, sondern Hilfe von außen benötigt, um diese Schwierigkeiten überwinden zu können. Solange das Grundverständnis für Zahlen, mathematische Operationen und die logische Verwendung von Arbeitsmitteln fehlt, ist jegliches sonstige Üben und Automatisieren nutzlos, da es sich um leeres, nicht verknüpftes Wissen handelt. Es entsteht bei Kindern lediglich ein Inselwissen. Diese Inseln können nur in Zusammenarbeit mit anderen Menschen durch „Fährverbindungen" zusammen wachsen. Kinder, die für jedes mathematische Problem auf eine andere Insel reisen müssen, bekommen keine mathematischen Zusammenhänge. Regeln werden ohne Verständnis auswendig gelernt, können kurzfristig angewandt werden, über einen längeren Zeitraum werden diese jedoch vergessen, verwechselt oder nach eigenen Regeln umgebaut. Die von den Kindern mühsam selbst erarbeitete Regel bei der Addition von zweistelligen Zahlen, Zehner + Zehner und Einer + Einer, funktioniert schon bald nicht mehr, denn bei Rechnungen mit Überträgen kommt es zu Fehlern und spätestens bei der Subtraktion ergeben sich vollkommen falsche Ergebnisse. Wird diese Regel ohne Verständnis angewandt, muss das Kind für Aufgaben mit Überträgen schon wieder eine neue Regel finden, diese gilt dann für die alten Aufgaben nicht mehr. Das Kind kann sich vor lauter Regeln letztendlich die Anwendung keiner einzigen mehr korrekt merken und bringt alle durcheinander. Typisch dafür ist: Es scheint, dass Kinder mit einer Rechenstörung einen Unterrichtsstoff an einem Tag verstanden haben und am nächsten diesen wieder nicht reproduzieren bzw. anwenden können. Dies deutet aber darauf hin, dass es sich bei diesem Können nur um auswendig gelernte Merksätze oder Rezepte handelt, die bedeutungslos gelernt wurden und für die Kinder einfach austauschbar sind. Bei manchen Kindern zeigt sich das Verwechseln dieser Regeln sogar oftmals innerhalb weniger Minuten. Aus diesem Grund muss unbedingt mit der Bewältigung dieser drei oben beschriebenen Hauptsymptome in einer Förderung begonnen werden. Den alten nicht verstandenen Stoff ständig zu wiederholen ist wenig sinnvoll, da die Grundlage für das Verständnis dieser Inhalte fehlt.

Literatur

- ***Kaufmann, Sabine; Wessolowski, Silvia (2006):*** *Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine. Seelze: Kallmeyer.*
- ***Kittel, Andreas (2011):*** *3+3=5 Rechenstörung: Merkmale, Diagnose und Hilfen. Braunschweig: Westermann.*
- ***Lorenz, Jens Holger; Radatz, Hendrik (2007):*** *Handbuch des Förderns im Mathematik-unterricht. Hannover: Schroedel.*
- ***Remschmidt, Helmut (Hg.) (2009):*** *Multiaxiales Klassifikationsschema für psychische Störungen des Kindes- und Jugendalters nach ICD-10 der WHO. Mit einem synopti-schen Vergleich von ICD-10 und DSM-IV. 5. Aufl. Bern: Huber.*
- ***Wehrmann, Michael (2003):*** *Qualitative Diagnostik von Rechenschwierigkeiten im Grundlagenbereich Arithmetik. Berlin: Köster.*

Unser Autor

Prof. Dr. Andreas Kittel lehrt und forscht an der PH Weingarten. Er leitet dort eine Beratungsstelle für Jugendliche mit Problemen im Mathematikunterricht.

Kontakt: kittel@ph-weingarten.de

Impressum

Die Unterrichtspraxis – Beilage zu „bildung und wissenschaft"", Zeitschrift der Gewerkschaft Erziehung und Wissenschaft Baden-Württemberg, erscheint unter eigener Redaktion achtmal jährlich.

Redaktion: Joachim Schäfer (verantwortlicher Redakteur), Helmut Däuble und Nicole Neumeister
Anschrift der Redaktion: Joachim Schäfer, Meisenweg 10, 71634 Ludwigsburg, E-Mail: unterrichtspraxis@gmx.de
Nachbestellungen über die GEW-Bezirksgeschäftsstellen (Adressen im Impressum von b&w). Dieses Heft kann auch online abgerufen werden:
www.gew-bw.de/unterrichtsmaterialien/

Gestaltung: Tomasz Mikusz, Süddeutscher Pädagogischer Verlag

Zur Mitarbeit sind alle Kolleginnen und Kollegen herzlich eingeladen. Manuskripte können direkt an die Redaktion der Unterrichtspraxis geschickt werden.